Die Gauß'sche Osterregel

Stefan Gerth

1. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

> *„Die Absicht dieses Aufsatzes ist nicht, das gewöhnliche Verfahren zur Bestimmung des Osterfestes zu erörtern, das man in jeder Anweisung zur mathematischen Chronologie findet, und das auch an sich leicht genug ist, wenn man einmahl die Bedeutung und den Gebrauch der dabey üblichen Kunstwörter, güldne Zahl, Epakte, Ostergränze, Sonnenzirkel und Sonntagsbuchstaben weiß, und die nöthigen Hülfstafeln vor sich hat: Sondern vor dieser Aufgabe eine von jenen Hülfsbegriffen unabhängige und bloß auf den einfachsten Rechnungs-Operationen beruhende rein analytische Auflösung zu geben.“* (Seite 121, [1])

So beginnt der Aufsatz von Carl Friedrich Gauß[1], in dem er eine Formel zur Berechnung des Osterfestes aufstellt. Mit deren Hilfe kann Ostern durch die Kenntnis der Jahreszahl berechnet werden. Zu diesem Thema gibt es viele Arbeiten, deren Ziel es ist, auf mathematischem Weg die Richtigkeit dieser Formel zu beweisen, aber nur wenige, die darlegen, was die verschiedenen Variablen bedeuten. Des weiteren wird die Ausgleichsrechnung für den Gregorianischen Kalender erklärt.

2 Grundlegende Informationen

2.1 Metonischer Zyklus

Die Stellung von Mond und Erde ist nicht jedes Jahr genau gleich, was auf die verschiedenen Umlaufgeschwindigkeiten zurückzuführen ist. Der Grieche Meton erkannte, dass alle 19 Jahre die gleiche Konstellation auftritt, weswegen man von einem 19-jährigen *Metonischen Zyklus* spricht (auch als *Mondzyklus* bekannt). Die Nummer eines Jahres im Zyklus nennt man *Goldene Zahl*, welche sich dann folglich einfach berechnen lässt mit: $GZ \equiv A \pmod{19} + 1$

Die Zahl 1 muss addiert werden, da die Goldene Zahl von 1 bis 19 definiert ist und in der Restzahldivision auch die 0 vorhanden wäre, wobei A die Jahreszahl beschreibt.

[1] 1777–1855

Es ist nun leicht ersichtlich, dass alle 19 Jahre die Mondphasen sich an einem bestimmten Datum wiederholen. Also ist auch das Osterfest variabel, da es ja von den Mondphasen und dem Wochentag abhängig ist.
Durch das Konzil von Nicäa[2] ist Ostern auf den ersten Sonntag nach dem ersten Vollmond im Frühling festgelegt worden, wodurch der Zusammenhang zwischen dem Osterfest und dem Mond klar wird. Da jedes Jahr der erste Vollmond im Frühling an einem anderem Tag ist, fällt Ostern auch jedes Jahr auf einen anderen Sonntag.

2.2 Sonnenzirkel

Da im Julianischen Kalender das Jahr nur 365 Tage hat und die Abweichnug nur durch Schalttage[3] ausgeglichen wird, kann man vereinfacht davon ausgehen, dass jedes Jahr mit dem gleichen Wochentag endet wie es anfängt. Dies kann man auch durch die Modulo Rechnung beweisen: $365 \equiv 1 \pmod 7$
Die Restzahldivision mit der Anzahl der Wochentage hat das Ergebnis 1; daraus folgt, dass jedes Jahr mit dem gleichem Tag anfängt und endet und somit der Wochentag zu Beginn des nächsten Jahres der auf das letzte Jahr folgende ist.
Da aber alle 4 Jahre, wegen des Schaltjahres, die Restzahldivision 2 ergibt, liegt kein 7 jähriger Zyklus vor, sondern ein 28-jähriger, welchen man als Sonnenzirkel bezeichnet. So fallen nach 28 Jahren die gleichen Wochentage auf die gleichen Daten.

2.3 Epakte

Das Mondalter am 01.01. wird als Epakte bezeichnet und zeigt, wie viele Tage seit dem letzten Neumond vergangen sind. Die Mondphasen am 01.01. und am 31.03. sind gleich, da genau 89 Tage, Schalttage ausgenommen, zwischen diesen beiden Daten liegen. Die synodische Umlaufzeit[4] des Mondes beträgt genau $29,53059$ Tage.

$$89 \div 29,53059 = 3,0138\ldots$$

[2] 532 n. Chr.
[3] Alle 4 Jahre wird ein Schalttag eingefügt
[4] Erde, Mond und Sonne haben wieder die gleiche Stellung

Dies sind ziemlich genau 3 synodische Mondmonate. Aus diesem Grund kann man davon ausgehen, dass am 01.01. und am 31.03 eines Jahres immer die gleiche Mondphase ist.

Durch die Kalenderreform veränderte sich auch der Epaktenbegriff, weswegen man zwischen den Julianischen und den Gregorianischen Epakten unterscheiden muss. In der Osterformel von Gauß werden für einen Mondmonat immer 30 Tage verwendet.

2.3.1 Im Julianischen Kalender

Das Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 wurde so definiert, dass am 24.12 des vorherigen Jahres ein Neumond war. Das Mondalter ist deswegen am 01.01. auf den Wert 8 festgelegt. Da das Mondjahr 11 Tage kürzer ist, wächst die *Epakte* am 01.01. jedes Jahr um 11 Tage an. Bei Vollendung des 19-jährigen *Metonischen Zyklus* werden 12 Tage addiert, um das folgende Jahr wieder mit der *Epakte* 8 zu starten.

$$\begin{aligned} \mathrm{E_{GZ19}} &= 8 + 19 \cdot 11 = 206 \equiv 26 \pmod{30} \\ \mathrm{E_{GZ1}} &= 8 + 19 \cdot 11 + 12 = 218 \equiv 8 \pmod{30} \end{aligned}$$

2.3.2 Im Gregorianischen Kalender

Die Gregorianische *Epakte* erhöht sich genauso wie die Julianische jedes Jahr um 11 Tage, und am Ende des 19-jährigen *Metonischen Zyklus* erhöht sie sich um 12. Da durch die Reform einige Schaltjahre wegfallen, verringert sich dadurch die *Epakte* um einen Tag, was als Sonnengleichung bezeichnet wird, da die Erde an den Lauf der Sonne angeglichen wird. Durch eine kleine Ungenauigkeit im *Metonischen Zyklus* ist der Mond in 2500 Jahren um 8 Tage älter. Es müssen also in einigen Zeitabschnitten Tage zu der *Epakte* dazuaddiert werden. Deswegen muss für jedes Jahrhundert die Epakte für ein Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 berechnet werden, was im weiteren Verlauf als *Jahrhundertepakte* bezeichnet wird. Das Mondalter am 01.01. in einem Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 in einem beliebigen Jahrhundert k wird als *Jahrhundertepakte* $\mathrm{E_{GZ1}(k)}$ bezeichnet.

Diese Änderungen waren nötig, um einen erneuten Fehler auszuschließen, aber der alte musste noch korrigiert werden. Dies geschah, indem man von der alten *Epakte* 10 Tage abzog, welche der Kalender dem Sonnenlauf hinterher war, wodurch er wieder an den Lauf der Sonne angeglichen war. Der Fehler, welcher durch den *Metonischen Zyklus* auftritt, hatte sich zu dieser Zeit schon auf 3 Tage addiert. Deswegen musste man zu dem Mondalter noch 3 Tage dazuzählen. Der neue Wert für die *Jahrhundertepakte* war nicht mehr 8 sondern nur noch 1.

$$\mathrm{E}_{\mathrm{GZ1}}(15) = 8 - 10 + 3 = 1$$

2.3.3 Berechnung der Gregorianischen Epakten

Da durch die Regelungen der Gregorianischen Kalenderreform[5] Schalttage wegfallen, muss die Epakte für jedes Jahrhundert neu berechnet werden. Die Formel für die Berechnung der *Jahrhundertepakte* für ein beliebiges Jahrhundert sieht deswegen nun folgendermaßen aus:

$$\mathbf{E_{GZ1}(k) = 8 - (k - q) + p \pmod{30}}$$

Die Variablen k, p und q sind jeweils die größten Teiler aus dem natürlichen Zahlenraum. Die Zahl 8 ist unsere ursprüngliche *Epakte*, die mit den Variablen k, q und p ausgeglichen wird. Die Variable k gibt an, in welchem Säkularjahr[6] man sich befindet, und ist somit $A \div 100$. Durch diese Division erhält man die Tage, die wegfallen würden, wenn man jedes Säkularjahr den Schalttag weglassen würde. Da aber in Säkularjahren, die restlos durch 400 teilbar sind, das Schaltjahr stattfindet, muss von k noch ein Wert abgezogen werden, der angibt, wie oft der Schalttag dennoch stattgefunden hat, was durch q geschieht. Daraus ist leicht ersichtlich, dass $q = k \div 4$.

Wenn ein Schalttag wegfällt, so verringert sich der Wert der *Epakte* um eine Einheit, wodurch der Fehler des Sonnenumlaufes korrigiert wird. Um das Mondalter dann noch an den Lauf des Mondes anzupassen, wurde eine sogenannte Mondgleichung erstellt. Da der Fehler im 19-jährigen *Metonischen Zyklus* alle 312,5 Jahre um einen Tag wächst, würde sich dieser in 2500 Jahren auf 8 Tage belaufen. Der Mond ist dadurch in 2500 Jahren um 8 Tage älter als vorgesehen und

[5] siehe 3.2.1

[6] Das Jahr, welches ein Jahrhundert beendet, wird als Säkularjahr bezeichnet

deshalb müssen diese 8 Tage bei der Berechnung der *Epakte* auch berücksichtigt werden. Aus diesem Grund erhöht man sieben mal in Folge alle 300 Jahre die *Epakte* um eine Einheit, das achte Mal erhöht man sie erst nach 400 Jahren, wobei der Beginn dieses Zyklus auf das Jahr 1800 festgelegt wurde.
Der Term $-(k-q)$ beschreibt, wie oft ein Schalttag weggefallen ist, also um wie viele Tage die *Epakte* verkleinert wurde. Zu diesem Wert muss nun die Anzahl der Tage dazugezählt werden, welche durch den Fehler des *Metonischen Zyklus* entstehen, was durch p geschieht.

$$p = \frac{8 \cdot k + 13}{25}$$

Nach dieser Formel wächst p sieben mal jeweils um eine Einheit, wenn $\Delta k = 3$, bei dem achten Mal wächst es erst um eine Einheit wenn $\Delta k = 4$.

3 Formel von Gauß

3.1 Im Julianischen Kalender

3.1.1 Allgemein

Die Osterformel von Gauß besteht aus fünf verschiedenen Variablen, wobei die ersten drei nur von der Jahreszahl abhängig sind und die restlichen beiden aus den ersten drei Unbekannten errechnet werden. Es gibt noch zwei „feste“ Zahlenwerte, welche in jedem Jahrhundert andere Werte haben, für die Zeit des Julianischen Kalenders (bis 4.10.1582) sind diese Werte jedoch festgesetzt auf 15 und 6.

$$\begin{aligned}
a &\equiv A \pmod{19} \\
b &\equiv A \pmod{4} \\
c &\equiv A \pmod{7} \\
d &\equiv 19a + 15 \pmod{30} \\
e &\equiv 2b + 4c + 6d + 6 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Falls $d + e \leq 10$ ist Ostern der $(22 + d + e)$te März.
Falls $d + e > 10$ ist Ostern der $(d + e - 9)$te April.

3.1.2 Die Variable a

Zuerst muss ermittelt werden, in welchem Jahr eines 19-jährigen Zyklus man sich befindet. Dies wird erreicht, wenn die Jahreszahl, für welche Ostern berechnet werden soll, im Zahlenraum $\pmod{19}$ betrachtet wird:

$$\mathbf{a \equiv A \pmod{19}}$$

Das Ergebnis ist die Anzahl der Jahre, die seit dem letzten vollendeten *Metonischen Zyklus* vergangen sind. Dadurch kann man berechnen, wann der erste Vollmond im Frühling ist[7].

3.1.3 Die Variable b

Im Julianischen Kalender gab es alle vier Jahre einen sogenannten Schalttag. Um zu überprüfen wann das letzte Schaltjahr war, muss das Jahr einfach im Zahlenraum $\pmod{4}$ betrachtet werden. Diese Variable gibt an, wie viele Jahre seit dem letztem Schaltjahr vergangen sind.

$$\mathbf{b \equiv A \pmod{4}}$$

Man kann nun leicht Aussagen über die Anzahl der Schalttage in einem bestimmten Zeitraum machen, indem man von der Jahreszahl A einfach b abzieht. Somit erhält man das Jahr an welchem das letzte mal ein Schalttag eingefügt worden ist.

3.1.4 Die Variable c

Diese Variable ist lediglich eine Hilfsvariable, die dazu dient, die Berechnung zur Anzahl der Tage, welche nach der Ostergrenze[8] verstreichen müssen, zu erleichtern[9]. Da bei der Vereinfachung von e die Jahreszahl A sehr störte, wurde ein Trick gefunden, diese zu „eliminieren“; man subtrahiert von A die Anzahl der Jahre, die vergangen sind, seit A das letzte Mal restlos durch 7 teilbar war.

$$\mathbf{c \equiv A \pmod{7}}$$

$A - c$ ist somit immer restlos durch 7 teilbar, weswegen A im Zahlenraum $\pmod{7}$ wegfällt.

[7]siehe 3.1.5

[8]Der erste Vollmond im Frühling wird als Ostergrenze bezeichnet

[9]siehe 3.1.6

3.1.5 Die Variable d

Durch die Kenntnis des Mondalters in einem Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 kann man leicht den ersten Vollmond im Frühling berechnen, welcher als *Ostergrenze* bezeichnet wird. Da diese *Epakte* im Julianischen Kalender immer auf 8 festgesetzt ist, fällt die Berechnung nicht schwer. Denn somit ist auch die Mondphase am 31.03. bekannt [10]. Da im Julianischen Kalender das Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 am 24.12. des vorherigen Jahres einen Vollmond hatte, bedeutet dies, dass das Mondalter am 01.01. 8 Tage beträgt. Da Vollmond immer 13 Tage nach Neumond ist, bedeutet dies, dass 5 Tage nach dem 01.01. und auch nach dem 31.03. Vollmond ist. Der früheste Termin für den ersten Vollmond im Frühling ist jedoch der 21.03, weswegen wir davon ausgehen können, dass in einem Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 der erste Vollmond im Frühling 15 Tage nach dem 21.03. ist.

Wenn der erste Vollmond des Frühlings im April ist, weiß man, dass nächstes Jahr der Vollmond 11 Tage früher ist; wenn er im März ist, dass er 19 Tage später ist. Die Variable d ist also die Anzahl der Tage bis zum nächsten Vollmond, auch für Jahre, welche nicht die *Goldene Zahl* 1 haben:

$$d \equiv 15 - 11u + 19v \pmod{30}$$

Wenn u und v angeben, wie oft ein Vollmond, in einem *Metonischen Zyklus*, im März oder im April war, folgt daraus $u+v=a$. Wenn wir uns in einem Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 befinden ($a=0$), ist der Termin für den ersten Vollmond im Frühling der 05. April. Ohne weitere Umformung hilft uns die Gleichung aber nicht weiter, da wir nicht wissen, wie oft in diesem 19-jährigen Zyklus der Vollmond in den April oder in den März fällt.

Da bekannt ist, wie u und v mit der bekannten Größe a zusammenhängen, kann man die Unbekannte v durch $v = a - u$ leicht umgehen. Daraus folgt für d:

$$d \equiv 15 - 11u + 19(a-u) = 15 - 11u + 19a - 19u = 15 - 30u + 19a \pmod{30}$$

[10] siehe 2.3

Da wir uns durch die Dauer eines Mondmonates im Zahlenraum (mod30) bewegen, verschwindet auch die Unbekannte u, und es entsteht eine Formel zur Berechnung der *Ostergrenze*, die nur noch von a abhängig ist:

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{19a} + \mathbf{15} \pmod{\mathbf{30}}$$

3.1.6 Die Variable e

Nachdem die *Ostergrenze* berechnet werden kann, muss man nur noch herausfinden, wie viele Tage nach der *Ostergrenze* bis zum ersten Sonntag vergehen. Gauß suchte sich einen beliebigen Sonntag und berechnete einfach die Differenz der Tage. Diese muss 0 im Zahlenraum (mod7) ergeben, da sonst nicht an beiden Tagen ein Sonntag wäre. Die Variable e ist somit die Anzahl an Tagen, die nach der Ostergrenze vergehen müssen, bis wieder Sonntag ist. Gauß wählte den 21.03.1700 und folgerte, dass der Ostersonntag der $(22 + d + e)$te März sein müsse.

$$21 - (22 + d + e) + 365 \cdot (1700 - A) + \frac{1}{4}(1700 - A + b) - 11 \equiv 0 \pmod{7}$$

Diese Formel dient dazu, die Differenz der Tage zu berechnen, welche bis zu dem von Gauß festgelegten Termin noch vergehen müssen. Es ist leicht erkennbar, dass er zuerst die Differenz der Jahreszahlen berechnet und diese mit 365 multipliziert, um dadurch die Anzahl der Tage zu erhalten, welche in dieser Zeitspanne liegen. Da es in dieser Zeit ja auch Schaltjahre gibt und somit einige Tage noch nicht berücksichtigt wurden, müssen diese noch addiert werden, was durch den Term $\frac{1}{4}(1700 - A + b)$ geschieht. Um nun die Differenz zwischen den Schaltjahren und somit auch die Anzahl der Schaltjahre herauszufinden, muss man zunächst das letzte Schaltjahr errechnen, was durch den Term $-A + b$ geschieht [11]. Das Jahr 1700, welches Gauß als Bezugspunkt für seine Rechnung genommen hatte, ist ein Jahr, welches außerhalb der Gültigkeit des Julianischen Kalenders liegt. So müssen noch zehn weitere Tage abgezogen werden, die bei der Umstellung auf den Gregorianischen Kalender[12] übersprungen wurden. Diese zehn Tage sind aber nicht das einzige, was berücksichtigt werden muss, da der Genauigkeit wegen in 400 Jahren drei Schalttage wegfallen. Diese Schalttage

[11] siehe 3.1.3
[12] siehe 3.2.1

fallen immer in den Säkularjahren weg, welche nicht restlos durch 400 teilbar sind. Da das Jahr 1700 das erste Jahr nach der Kalenderreform am 04.10.1582 war, in welchem ein solcher Schalttag entfallen ist, muss noch ein Tag abgezogen werden, wodurch die 11 am Ende der Formel zu erklären ist.
Da wir uns im Zahlenraum $\pmod 7$ befinden, können wir auf jeder Seite einfach Terme addieren oder subtrahieren, welche durch 7 teilbar sind, da dadurch das Ergebnis nicht verändert wird.

$$\begin{aligned}0 &\equiv 21-(22+d+e)+365\cdot(1700-A)+\frac{1}{4}(1700-A+b)-11= \\ &= -d-e+3\cdot(1700-A)+2b-12= \\ &= -d-e+5100-3A+2b-12= \\ &= -d-e+2b-3c-8 \pmod 7\end{aligned}$$

Diese Umformung hat man durch die Ergänzung mit den Termen $-364\cdot(1700-A)+\frac{7}{4}\cdot(1700-A+b)$ und $3A-5096-3c$ erreicht. Wie leicht ersichtlich ist, sind diese Terme alle ein Vielfaches von 7, wodurch die Kongruenz zu 7 erhalten bleibt. $3A-3c$ ist auch immer ohne Rest durch 7 teilbar, da die Variable c angibt, vor wieviel Jahren $A \equiv 0 \pmod 7$ war. Wenn nun dieser Wert von A abgezogen wird, erhält man wieder eine Zahl, die ohne Rest durch 7 teilbar ist, auch wenn man sie mit 3 multipliziert[13].
Wenn man diese Gleichung nun nach e umstellt und $7c+7d$ hinzufügt, erhält man eine Formel für die Berechnung von e, welche nur noch von den uns bekannten Variabeln und einer Konstanten abhängig ist.

$$e \equiv 2b+4c+6d-8 \pmod 7$$

Da wir uns im Zahlenraum (mod7) bewegen, ist die Konstante -8 genau das Gleiche wie $+6$, da gilt: $-8 \equiv +6 \pmod 7$. So erhält man für e die Formel von Gauß für die Berechnung im Julianischen Kalender:

$$\mathbf{e \equiv 2b+4c+6d+6} \pmod{\mathbf{7}}$$

[13] siehe 3.1.4

3.2 Im Gregorianischen Kalender

3.2.1 Die Kalenderreform

Der Julianische Kalender wurde nach dem 4.10.1582 auf den Gregorianischen Kalender umgestellt. Bei dieser Umstellung wurde die Abweichung von den astronomischen Daten ausgeglichen, und es wurde versucht, eine erneute Abweichung so gut wie möglich zu unterbinden. Da der Julianische Kalender zu dieser Zeit schon 10 Tage den astronomischen Daten hinterher war, wurden bei der Reform einfach 10 Tage übersprungen. So folgte unmittelbar auf den Donnerstag, den 04.10.1582, Freitag, der 15.10.1582. Der entstandene Fehler war damit ausgeglichen, und es musste nur noch dafür gesorgt werden, dass kein erneuter Fehler entsteht.
In 400 Jahren muss nun drei mal ein Schalttag entfallen um den Fehler auszugleichen. Ein Schalttag entfällt immer, wenn das Säkularjahr nicht restlos durch 400 teilbar ist.

3.2.2 Die Variable M

Wenn die *Jahrhundertepakte*[14] 0 ist, dauert es bis zum nächsten Vollmond noch 13 Tage. So ist es nicht mehr schwer, den ersten Vollmond im Frühling, die sogenannte Ostergrenze, zu berechnen, da man weiß, dass am 01.01. und am 31.03. die gleiche Mondphase ist[15]. Da Frühlingsbeginn der 21.03. ist, bedeutet dies, dass in einem solchen Jahrhundert in einem Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 23 Tage nach Frühlingsbeginn die Ostergrenze ist. Wenn die *Jahrhundertepakte* $\mathrm{E_{GZ1}(k)}$ nun einen anderen Wert annimmt, ist die Ostergrenze $23 - \mathrm{E_{GZ1}(k)}$ Tage nach dem 21.03. Wenn $\mathrm{E_{GZ1}(k)} > 23$ ist, würde die Ostergrenze vor Frühlingsbeginn fallen und es müssen 30 Tage zu dem Ergebniss hinzugezählt werden.

$$\mathbf{M \equiv 23 - E_{GZ1}(k)} \pmod{30}$$

Die Variable M beinhaltet nun die Anzahl an Tagen in einem bestimmten Jahrhundert für ein Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1, welche nach dem 21.03. bis zur Ostergrenze verstreichen müssen.

[14]siehe 2.3.2
[15]siehe 2.3

3.2.3 Die Variable d

Um den ersten Vollmond im Frühling für den Gregorianischen Kalender zu ermitteln, berechnet man die Anzahl der Tage, die zwischen dem 21.03. und dem ersten Vollmond liegen. In einem Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 sind dies M Tage. Im Julianischen Kalender hat die *Epakte* im Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 immer den Wert 8. Da das Mondalter im Gregorianischen Kalender nicht immer den gleichen Wert hat, ändert sich auch die Anzahl der Tage, die bis zur Ostergrenze in einem Jahr mit der *Goldenen Zahl* 1 verstreichen muss. Die 15 Tage nach dem 21.03.[16] werden einfach durch die Variable M ersetzt, welche sich, abhängig vom Jahrhundert, ändern kann.

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{19a} + \mathbf{M} \pmod{\mathbf{30}}$$

3.2.4 Die Variable e

Die Variable e wird im Gregorianischen Kalender fast genauso berechnet wie im Julianischen Kalener. Da das Jahr nun aber meistens nach dem Bezugsjahr 1700 liegt, sieht die Differenz der Jahreszahlen etwas anders aus, und die Anpassung für den Gregorianischen Kalender muss beachtet werden[17]. Die Formel zur Berechnung sieht dann folgendermaßen aus:

$$(22 + d + e - 21) + 365 \cdot (A - 1700) + i \equiv 0 \pmod 7$$

Da nur in Säkularjahren, die restlos durch 400 teilbar sind, der Schalttag nicht wegfällt, muss i die Anzahl der Schalttage angeben, welche unter Berücksichtigung der Gregorianischen Kalenderreform seit dem Jahr 1700 stattgefunden haben.

$$i = \frac{1}{4} \cdot (A - b - 1700) - (k - q - C)$$

Die Anzahl der Schalttage, die ohne die Kalenderreform stattgefunden hätten, werden durch den Term $\frac{1}{4} \cdot (A - b - 1700)$ ausgedrückt. Da aber in jedem Säkularjahr, das nicht restlos durch 400 teilbar ist, der Schalttag entfällt, muss eine bestimmte Anzahl an Tagen abgezogen werden, was durch den Term $(k - q - C)$ erreicht wird. Die Zahl des Säkularjahres wird durch k ausgedrückt, daraus folgt,

[16] siehe 3.1.5

[17] siehe 3.2.1

dass $k = A \div 100$. Wenn dieses Ergebnis keine natürliche Zahl ist, wird abgerundet. Die Anzahl der Säkularjahre, in denen kein Schalttag wegfällt, wird durch die Variable q errechnet $q = k \div 4$. Da bei dem Bezugspunkt, dem Jahr 1700, der Term $(k - q - C) = 0$ sein muss, kann man leicht mit $k = 17$ und $q = 4$ die Ausgleichsgröße C berechnen.

$$17 - 4 - C = 0 \Rightarrow C = 13$$

Wenn man nun i in die vorherige Gleichung wieder einsetzt, kann man durch Ergänzung mit den Termen $-364 \cdot (A - 1700) + \frac{7}{4} \cdot (A - b - 1700)$ und $-3A + 5096 + 3c$, welche alle durch 7 teilbar sind, die Formel wieder vereinfachen.

$$\begin{aligned} 0 &= (22 + d + e - 21) + 365(A - 1700) + \frac{1}{4}(A - b - 1700) - k + q + 13 = \\ &= d + e + 3A - 5100 - 2b - k + q + 14 = \\ &= d + e - 4 - 2b + 3c - k + q \pmod 7 \end{aligned}$$

Dies muss man jetzt nur noch nach e umstellen und noch mit $7c + 7d$ erweitern und man erhält folgenden Ausdruck:

$$e \equiv 2b + 4c + 6d + 4 + k - q \pmod 7$$

Der „konstante“ Rest wird zu der Variablen N zusammengefasst, welche immer für ein Jahrhundert gleich ist. $N = 4 + k - q$

$$\mathbf{e \equiv 2b + 4c + 6d + N \pmod 7}$$

3.2.5 Ausnahmeregelungen

Da der reale Mondlauf sehr schwer zu berechnen ist, beschreibt Gauß in seiner Formel einen virtuellen Mond. Dies wird deutlich in den beiden Ausnahmefällen, welche genau aus diesem Grund eingeführt wurden. Diese Formel beinhaltet zwei Osterfesttermine, welche als zu extrem gehalten werden und deshalb eine Woche nach vorne verschoben werden.

Der 26. April Wenn der errechnete Termin für das Osterfest auf den 26. April fällt, findet das Osterfest am 19. April statt. Im Julianischen Kalender war der späteste Termin für das Osterfest der 25. April, weshalb diese Sonderregelung eingeführt wurde, da man am 25. April als spätesten Termin festhalten wollte. Dies wird als die erste Ausnahme bezeichnet.

Der 25. April Da nach der Osterformel in einem 19-jährigen Zyklus der Termin zweimal auf den 25. fallen kann, wurde einer dieser Termine auf den 18. April verschoben. Diese Regel sieht vor, dass Ostern nur dann auf den 18. April verschoben wird, wenn $a > 10$ und $d = 28$. Diese Regelung ist die sogenannte zweite Ausnahme.

3.2.6 Beispiele

Berechnung des Osterfestes für das Jahr $A = 2000$

$$\begin{aligned}
a &\equiv 2000 \equiv 5 \pmod{19} \\
b &\equiv 2000 \equiv 0 \pmod{4} \\
c &\equiv 2000 \equiv 5 \pmod{7} \\
d &\equiv 19 \cdot 5 + 24 = 119 \equiv 29 \pmod{30} \\
e &\equiv 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 29 + 5 = 199 \equiv 3 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Ostern ist der $d + e - 9$te April, also der 23. April 2000.

Berechnung des Osterfestes für das Jahr $A = 2001$

$$\begin{aligned}
a &\equiv 2001 \equiv 6 \pmod{19} \\
b &\equiv 2001 \equiv 1 \pmod{4} \\
c &\equiv 2001 \equiv 6 \pmod{7} \\
d &\equiv 19 \cdot 6 + 24 = 138 \equiv 18 \pmod{30} \\
e &\equiv 2 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 18 + 5 = 139 \equiv 6 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Ostern ist der $d + e - 9$te April, also der 15. April 2001.

Berechnung des Osterfestes für das Jahr $A = 2002$

$$\begin{aligned}
a &\equiv 2002 \equiv 7 \pmod{19} \\
b &\equiv 2002 \equiv 2 \pmod{4} \\
c &\equiv 2002 \equiv 0 \pmod{7} \\
d &\equiv 19 \cdot 7 + 24 = 157 \equiv 7 \pmod{30} \\
e &\equiv 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 7 + 5 = 51 \equiv 2 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Ostern ist der $22 + d + e$te März, also der 31. März 2002.

Berechnung des Osterfestes für das Jahr $A = 2003$

$$\begin{aligned}
a &\equiv 2003 \equiv 8 \pmod{19} \\
b &\equiv 2003 \equiv 3 \pmod{4} \\
c &\equiv 2003 \equiv 1 \pmod{7} \\
d &\equiv 19 \cdot 8 + 24 = 176 \equiv 26 \pmod{30} \\
e &\equiv 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 26 + 5 = 171 \equiv 3 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Ostern ist der $d + e - 9$te April, also der 20. April 2003.

Berechnung des Osterfestes für das Jahr $A = 2004$

$$\begin{aligned}
a &\equiv 2004 \equiv 9 \pmod{19} \\
b &\equiv 2004 \equiv 0 \pmod{4} \\
c &\equiv 2004 \equiv 2 \pmod{7} \\
d &\equiv 19 \cdot 9 + 24 = 195 \equiv 15 \pmod{30} \\
e &\equiv 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 15 + 5 = 103 \equiv 5 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Ostern ist der $d + e - 9$te April, also der 11. April 2003.

4 Schlussgedanke

Da auch einige Professoren an der Friedrich-Alexander-Universität mir nicht weiterhelfen konnten, war es nicht leicht, brauchbare Informationen zu bekommen. Die meisten veröffentlichten Arbeiten versuchen, anhand von mathematischen Herleitungen die Gauß'sche Formel zu widerlegen oder zu beweisen, dass man während der Gültikkeit des Gregorianischen Kalenders mit dieser Formel immer die richtigen Osterdaten errechnen kann. Dies war nicht das Ziel meiner Arbeit. Diese Facharbeit soll erklären, wie und warum diese Formel funktioniert.

Literatur

[1] Dr. Carl Friedrich Gauß, Berechnung des Osterfestes, in: Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, August 1800 Jahrgang 2, Seite 121–130.

[2] Alfons Graßl, Die Gaußsche Osterregel und ihre Grundlagen, in: Sterne und Weltraum, 4/1993 Jahrgang 32, Seite 274–277.

[3] http://www.ortelius.de/kalender/east_de.html
Letzte Änderung am 09. März 2002, angesehen am 29. Dezember 2002.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.

Nürnberg, den 1. Februar 2003